محاضرات التفاضل و التكامل

المحاضرة الأولى

الأعداد الحقيقية : هي التي تستخدم في العد وهي اول نظام عددي عرفه الإنسان ويرمز لها بالرمز N

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

الأعداد الصحيحة : هي الأعداد الحقيقية مضافاً إليها الصفر وسالب الطبيعية أو الطبيعية ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

الأعداد القياسية : هي الأعداد التي على شكل $\frac{a}{b}$، حيث a, b يمثلان عددين صحيحين ويرمز لها بالرمز Q

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in Z \right\}$$

المتباينات

إذا كان a, b عددين حقيقيين وكانت النقطة المقابلة للعدد a تقع على يمين النقطة المقابلة لـ b على خط الأعداد فإننا نقول ان العدد a أكبر من العدد b.

إشارات المتباينة $(>, \geq, <, \leq, \neq)$

- $>$ أكبر
- $\geq$ أكبر أو يساوي
- $<$ أصغر
- $\leq$ أصغر أو يساوي
- $\neq$ لا يساوي

ج/ اوجد حل المتباينة $2X+1>2$

الحل/ ① يضاف عكس اشارة الرقم بالقرب من X للطرفين

$$2X+1-1>-1+2$$

$$2X>1 \Rightarrow X>\frac{1}{2}$$

مثال/ ما هي حلول المتباينة $1-3X>2$

① يضاف عكس اشارة الرقم بالقرب من X للطرفين

$$-1+1-3X>2-1$$

$$-3X>1$$

② المعامل المخالف على معامل المجهول

$$X>\frac{-1}{3}$$

الفترات

① الفترة المفتوحة (a,b) وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية X التي تقع بين a و b بحيث لا يكون العددان ضمن هذه المجموعة

مثال/ $(a,b)=\{X: a<X<b\}$

جد الفترة المفتوحة للمجموعة $\{4,5,6,7\}$

$(4,7)$

الحل $\{5,6\}$

(5)

فترة المغلقة $[a, b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي تقع بين a و b بما في ذلك a و b

مثال جد الفترة المغلقة $[4, 7]$ للمجموعة $\{4, 5, 6, 7\}$

الحل $[4, 5, 6, 7]$

٢- الفترة نصف المفتوحة $(a, b]$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي تقع بين a و b بما في ذلك العدد b

مثال جد الفترة نصف المفتوحة $(4, 7]$ للمجموعة $\{4, 5, 6, 7\}$

الحل $(5, 6, 7)$

٤- الفترة نصف المفتوحة $[a, b)$: هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي تقع بين a و b بما في ذلك العدد a

مثال $[4, 7)$ او جد الفترة نصف المفتوحة للمجموعة $\{4, 5, 6, 7\}$

الحل $(4, 5, 6)$

هذه الفترات تسمى الفترات المحدودة اما الفترات غير المحدودة فيمكن تصنيفها كالآتي :

١- (a, ∞) وهي كل الأعداد الحقيقية x الأكبر من العدد a

٢- $(-\infty, b)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية x الأصغر من العدد b

$[9, +\infty)$ وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية X الأكبر من

9 او تساويه

$(-\infty, 6]$ - وهي مجموعة كل الأعداد الحقيقية X الأصغر من

6 او تساويه

مثال اوجد مجموعة الحل ومثلها بيانياً على خط الأعداد للمتباينة

$$-11 \leq 2X - 3 < 7$$

الحل

$$\left.\begin{array}{l} -11 + 3 \leq 2X - 3 + 3 < 7 + 3 \\ -8 \leq 2X < 10 \end{array}\right\} \div 2$$

$$-4 \leq X < 5$$

$[-4, 5)$ وبذلك تكون مجموعة الحل

مثال / اوجد حل المتباينة $\frac{1}{X} < 4$

الحل / نضرب X طرفي $\frac{1}{X} < 4$ $\Leftarrow$ $1 < 4X$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{4} < X$

$(\frac{1}{4}, \infty)$

التفاضل

المشتقات :: رمز الدالة y ، $f(x)$ ،

رمز المشتقة y' و $f'(x)$

القاعدة الأولى :

$f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$ | مشتقة الثابت = صفر

$\in R$

① $f(x)=5 \Rightarrow f'(x)=0$

② $y=\frac{2}{3} \Rightarrow y'=0$

③ $f(x)=\sqrt{5} \Rightarrow f'(x)=0$

القاعدة الثانية ::

مشتقة $x^n \in$ x مرفوعة لأس n

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}$$

① $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

② $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$

③ $f(x)=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}$

④ $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

⑤ $f(x)=\frac{1}{x^3} \Rightarrow f(x)=x^{-3} \Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}$

⑥ $f(x)=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-1x^{-2}$

القاعدة الثالثة: اشتقاق الأسية (الكسرية)

$$f(x)=x^{\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}\ x^{\frac{\text{البسط}-\text{المقام}}{\text{المقام}}}$$

① $y=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

② $y=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3-2}{2}} \Rightarrow y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

③ $y=x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow y'=\frac{-1}{2}x^{\frac{-1-2}{2}} \Rightarrow y'=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

④ $y=x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4-3}{3}} \Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

القاعدة الرابعة: اشتقاق الجذرية

$$y=\sqrt[n]{x^a} \Rightarrow y=x^{\frac{a}{n}} \Rightarrow y'=\frac{a}{n}x^{\frac{a-n}{n}}$$

① $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}}$

$=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

② $y=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

③ $y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{\frac{1-3}{3}} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

مشتقة $f(x)=a\,x^n \Rightarrow f'(x)=a\cdot n\,x^{n-1}$

① $y=2x^3 \Rightarrow y'=6x^2$

② $y=5x^{-2} \Rightarrow y'=-10\,x^{-3}$

③ $f(x)=\frac{3}{x^2} \Rightarrow f(x)=3x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-6\,x^{-3}$

④ $f(x)=-x \Rightarrow f'(x)=-1$

⑤ $f(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2$

القاعدة السادسة: مشتقة عدد من الدوال

① $y=3x^5+7x \Rightarrow y'=15x^4+7$

② $f(x)=x^3+2x^2+x-3 \Rightarrow f'(x)=3x^2+4x+1-0$

③ $y=2x^2+\frac{1}{2}x \Rightarrow y'=4x+\frac{1}{2}$

④ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+9 \Rightarrow f'(x)=x-4x^2+0$

⑤ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+5 \Rightarrow f'(x)=x^2-3x^3+0$

⑥ $y=\sqrt{x}-\sqrt[4]{x} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

القاعدة السابعة: حاصل ضرب دالتين

(مشتقة الأولى) الثانية نفسها + (مشتقة الثانية) الأولى نفسها

① $f(x) = (x^2+2)(x^2+5)$

$f'(x) = (2x)(x^2+5) + (2x)(x^2+2)$

$= 2x^3 + 10x + 2x^3 + 4x$

② $f(x) = 3x(x+1) \Rightarrow f'(x) = (3)(x+1) + (1)(3x)$

$= 3x + 3 + 3x \Rightarrow 6x + 3$

③ $f(x) = (1-x)(x+1) \Rightarrow f'(x) = (1-x)(1) + (x+1)(-1)$

$= 1 - x - x - 1 = -2x$

④ $f(x) =$

القاعدة الثامنة: حاصل قسمة دالتين

$$\text{المشتقة} = \frac{(\text{مشتقة المقام})(\text{البسط}) - (\text{مشتقة البسط})(\text{المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

① $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$

② $f(x) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)(0) - (3)(1)}{(x+1)^2}$

③ $y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

④ $y = \frac{1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{(x+1)(0) - (1)(1)}{(x+1)^2}$

القاعدة بتاعت: مشتقة الدالة المرفوعة لأس

$$f(x) = (\text{الدالة})^n \Rightarrow f'(x) = n(\text{الدالة})^{n-1}(\text{مشتقة الدالة})$$

① $f(x) = (x^2 + x + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+x+1)^2(2x+1)$

② $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^5 \Rightarrow f'(x) = 5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$

③ $f(x) = (x^3 + x^2 + 5)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(x^3+x^2+5)^{\frac{-1}{3}}(3x^2+2x)$

④ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 5} \Rightarrow f(x) = (x^2 + x + 5)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + 5)^{\frac{-2}{3}}(2x+1)$

(5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$

$f(x) = (1)(x+1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(1)$

الاشتقاق الضمني

م/ نشتق حسب القواعد السابقة عندما يكون شكل الدالة $y = f(x)$

$y = x^2 + x + 1$

$y = \frac{x+1}{x-1}$

$y = \sqrt{x+1}$

$y = (x+1)^4$

- متى يكون الاشتقاق ضمني؟

١- اذا كانت الـ y مرفوعة للاس غير الواحد.

٢- اذا كانت الـ y مضروبة بـ x

٣- اذا كانت الـ y زاوية للدوال المثلثية

خطوات الحل

١- نشتق الدالة اشتقاق ضمني (نشتق الـ y ونضع y' ونشتق الـ x)

٢- نجعل الحدود التي تحتوي على y' في جهة لوحدها.

٣- نسحب y' عامل مشترك اذا وجدت اكثر من y'

$y^3 \Rightarrow 3y^2 y'$

$y^2 \Rightarrow 2y y'$

$y \Rightarrow 1\, y'$

$x^3 \Rightarrow 3x^2$

$x^2 \Rightarrow 2x$

$x \Rightarrow 1$

س١/ جد y' لكل مما يأتي

① $y^2 = 16x$

$$2yy' = 16 \Rightarrow y' = \frac{16}{2y} = \frac{8}{y}$$

② $x^2 + y^2 = 5$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

③ $x^2 + 2y^2 = x^3$

$$2x + 4yy' = 3x^2 \Rightarrow 4yy' = 3x^2 - 2x$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x}{4y}$$

④ $x^2 - y^2 = 7y - x$

$$2x - 2yy' = 7y' - 1 \Rightarrow 7y' + 2yy' = 2x + 1$$

$$y'(7 + 2y) = 2x + 1 \Rightarrow y' = \frac{2x+1}{7+2y}$$

(5) $x^3 y^2 - 2y = 5x + 3$

$(x^3)(2yy') + (y^2)(3x^2) - 2y' = 5 + 0$

$2x^3 yy' + 3x^2 y^2 - 2y' = 5$

$2x^3 yy' - 2y' = 5 - 3x^2 y^2$

$y'(2x^3 y - 2) = 5 - 3x^2 y^2$

$$y' = \frac{5 - 3x^2 y^2}{2x^3 y - 2}$$

---

(6) $x^2 y^2 + 3y = 7x + 5$

$(x^2)(2yy') + (y^2)(2x) + 3y' = 7 + 0$

$2x^2 yy' + 2xy^2 + 3y' = 7$

$2x^2 yy' + 3y' = 7 - 2xy^2$

$y'(2x^2 y + 3) = 7 - 2xy^2$

$$y' = \frac{7 - 2xy^2}{2x^2}$$

س/ اذا علمت ان $y'' \neq 2xy - 4y + 5 = 0$

$$y(2x-4) = -5$$

$$y = \frac{-5}{(2x-4)} \Rightarrow y = -5(2x-4)^{-1}$$

$$y' = 5(2x-4)^{-2}(2) \Rightarrow y' = 10(2x-4)^{-2}$$

$$y'' = -20(2x-4)^{-3}(2)$$

$$= -40(2x-4)^{-3}$$

جد المشتقة الثانية للدالة التالية (اختياري)

$$2xy^2 - 4y^2 + 5x^2 = 0$$

$$(2x)(2yy') + y^2(2) - 8yy' + 10x = 0$$

$$4xyy' + 2y^2 - 8yy' + 10x = 0$$

$$(4x)(y'') + 4yy' - 8y'' + 10 = 0$$

$$4xy'' + 4yy' - 8y'' = -10$$

$$y''(4x-8) = -10 - 4yy'$$

$$y'' = \frac{-10 - 4yy'}{4x-8}$$

$yx = 1$

$y = \frac{1}{x}$

$y = x^{-1}$

$y' = -x^{-2}$

$y'' = -2x^{-3}$

$yx = 1$

$y(1) + x(y') = 0$

$y + xy' = 0$

$y' = \frac{-y}{x}$

$y'' = \frac{(x)(-y') - (-y)(1)}{x^2}$

$y'' = \frac{-xy' + y}{x^2}$

$y'' = \frac{-x\left(\frac{-y}{x}\right) + y}{x^2}$

$y'' = \frac{+y + y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}$

$y'' = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

$y'' = 2x^{-3}$

تشتقات الدوال المثلثية :

قواعد الدوال المثلثية

① $y = \sin$ زاوية $\Rightarrow y' = \cos$ زاوية $\times$ مشتقة الزاوية

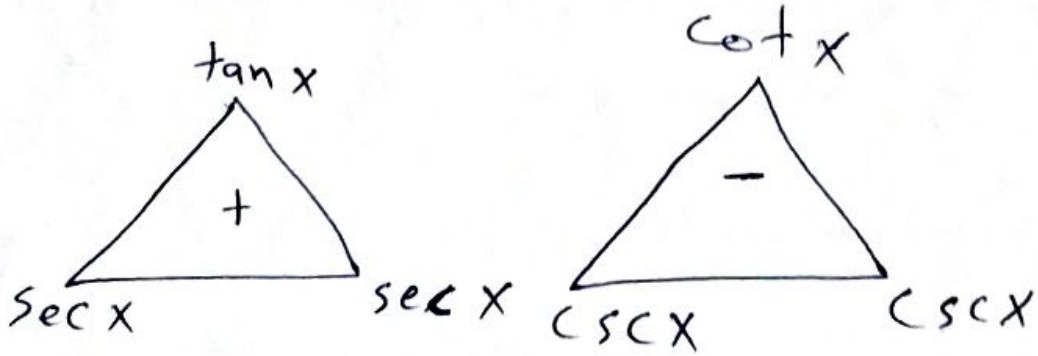
② $y = \cos$ زاوية $\Rightarrow y' = -\sin$ زاوية $\times$ مشتقة الزاوية

③ $y = \tan$ زاوية $\Rightarrow y' = \sec^2$ زاوية . مشتقة الزاوية

④ $y = \cot$ زاوية $\Rightarrow y' = -\csc^2$ زاوية . مشتقة الزاوية

⑤ $y = \sec$ زاوية $\Rightarrow y' =$ sec زاوية . Tan زاوية . مشتقة الزاوية

⑥ $y = \csc$ زاوية $\Rightarrow y' = -$ csc زاوية . cot زاوية . مشتقة الزاوية



① $y = \sin 5x \Rightarrow y' = \cos 5x \cdot 5 \Rightarrow y' = 5\cos 5x$ مثلاً

② $y = \cos(3x+1) \Rightarrow y' = -\sin(3x+1)(3) \Rightarrow y' = -3\sin(3x+1)$

③ $y = \tan 2x \Rightarrow y' = \sec^2 2x \cdot 2 \Rightarrow y' = 2\sec^2 2x$

④ $y = \sec 3x \Rightarrow y' = \sec 3x \cdot \tan 3x \cdot 3 \Rightarrow y' = 3\sec 3x \cdot \tan 3x$

⑤ $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$

⑥ $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x$

⑦ $y = 2\sin 3x \Rightarrow y' = 2\cos 3x \cdot 3 \Rightarrow y' = 6\cos 3x$

⑧ $y = 3\cos 2x \Rightarrow y' = -3\sin 2x \cdot 2 \Rightarrow y' = -6\sin 2x$

⑨ $y = x\sin x \Rightarrow y' = x \cdot \cos x + \sin x \cdot 1$

$= x\cos x + \sin x$

⑩ $y = \sin^2 x \Rightarrow y = (\sin x)^2 \Rightarrow y' = 2(\sin x)(\cos x)$

مثال: اذا كانت $y = \cos 2x$ جد المشتقة الرابعة.

$$y = \cos 2x \Rightarrow y' = -\sin 2x \cdot 2 \Rightarrow y' = -2\sin 2x$$

$$y'' = -2\cos 2x \cdot 2 \Rightarrow y'' = -4\cos 2x$$

$$y''' = +4\sin 2x \cdot 2 \Rightarrow y''' = 8\sin 2x$$

$$y'''' = 8\cos 2x \cdot 2 \Rightarrow y'''' = 16\cos 2x$$

مثال: اذا كانت $f(x) = \sin \pi x$ جد المشتقة الثالثة.

$$f(x) = \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = \cos \pi x \cdot \pi \Rightarrow f'(x) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi \sin \pi x \cdot \pi \Rightarrow f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^2 \cos \pi x \cdot \pi \Rightarrow f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

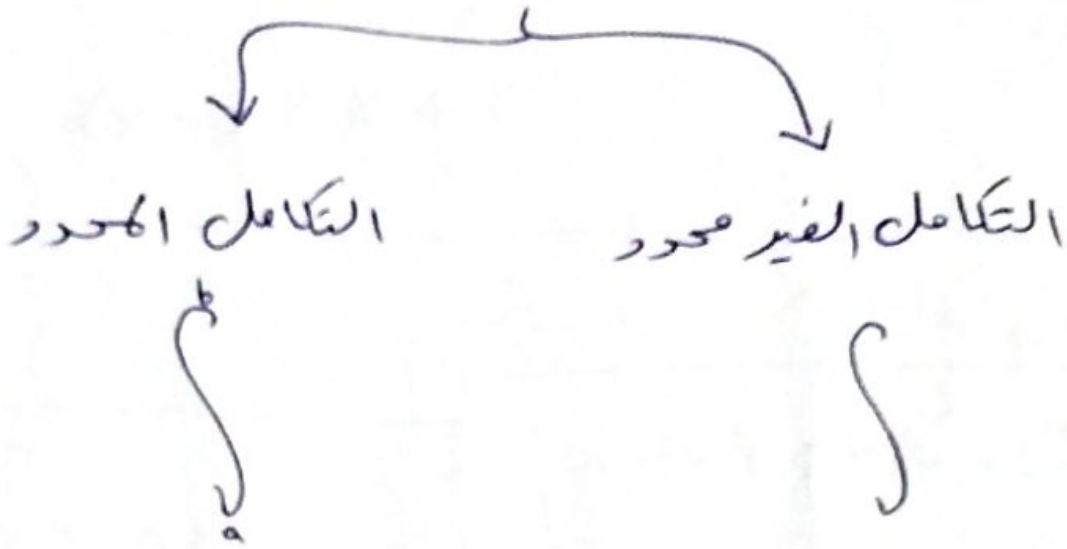
$$f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi (1) \Rightarrow f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi$$

التكامل

هو عملية عكس التفاضل وهو ارجاع المشتقة الى اصلها.

$\int$

انواع التكامل



س/ جد التكاملات الآتية

① $\int x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + c$

② $\int x^2\,dx \Rightarrow \frac{1}{3}x^3 + c$

③ $\int x^3\,.dx \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 + c$

④ $\int x^4\,.dx \Rightarrow \frac{1}{5}x^5 + c$

① $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2$

② $f(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2$

③ $f(x) = 2x - 10 \Rightarrow f'(x) = 2$

$$\int 2 \cdot dx \Rightarrow 2x + c$$

قواعد التكامل الأساسية

أولاً :: تكامل الثابت

$$\boxed{① \int a \cdot dx = ax + c}$$

هـ التكاملات التالية

① $\int 2 \cdot dx \Rightarrow 2x + c$

② $\int -6 \cdot dx \Rightarrow -6x + c$

③ $\int \sqrt{3} \cdot dx \Rightarrow \sqrt{3}x + c$

④ $\int \frac{1}{4} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{4}x + c$

⑤ $\int 3 \cdot dy \Rightarrow 3y + c$

⑥ $\int 8 \cdot dm \Rightarrow 8m + c$

ثانياً :: تكامل x^n

$$② \int x^n . dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

هو التكاملات التالية

① $\int x . dx = \frac{1}{2} x^2 + c$

② $\int x^2 . dx = \frac{1}{3} x^3 + c$

③ $\int x^{-3} . dx = \frac{-1}{2} x^{-2} + c$

④ $\int x^{-7} . dx = \frac{-1}{6} x^{-6} + c$

⑤ $\int x^{\frac{2}{3}} . dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

$$\frac{\text{مقام + بسط}}{\text{مقام}}$$

⑥ $\int x^{\frac{3}{4}} . dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + c$

⑦ $\int x^{\frac{-1}{3}} . dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

⑧ $\int \sqrt{x} . dx \Rightarrow \int x^{\frac{1}{2}} . dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

⑨ $\int \sqrt[3]{x} . dx \Rightarrow \int x^{\frac{1}{3}} . dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$

ثالثاً: تكامل $a x^n$

③ $$\int a x^n \cdot dx = a \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

① $\int 3x^5 \cdot dx = \frac{3}{6} x^6 + C = \frac{1}{2} x^6 + C$ هو تكامل التالية

② $\int 2x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 + C$

③ $\int 5y^2 \cdot dy = \frac{5}{3} y^3 + C$

④ $\int 2\sqrt[3]{x} \cdot dx \Rightarrow \int 2 x^{\frac{1}{3}} dx = 2 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$
$= \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} + C$

رابعاً: تكامل جمع او طرح عدة دوال

① $\int (3x^2 + 5) \cdot dx = x^3 + 5x + C$

② $\int (6x^2 - 4x + 3) \cdot dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$

③ $\int (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) \cdot dx = x^4 - x^3 + x^2 - 5x + C$

④ $\int (x^2 + x - 3x^2) \cdot dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + c$

⑤ $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) \cdot dx \Rightarrow \int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}) \cdot dx$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

⑥ $\int (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \cdot dx \Rightarrow \int (3x^2 + x^{\frac{-1}{2}}) \cdot dx$

$= x^3 - 2x^{\frac{1}{2}} + c$

خامساً تكامل قوس مرفوع إلى اس

س/ متى تستخدم القاعدة الخامسة؟

ج/ نستخدم القاعدة الخامسة اذا كان القوس مرفوع الى اس، والمشتقة داخل القوس متوفرة.

ملاحظة:- عند تكامل قوس مرفوع إلى اس نتبع خطوات:-

① نوحد متغير داخل القوس

② نهمل متغير داخل القوس

③ نضيف للاس واحد ونقسم في مقلوب الاس خارج القوس.

أمثلة على التكامل

① $\int (x^2+1)^8 \, 2x \cdot dx = \frac{1}{9}(x^2+1)^9 + c$

② $\int (x^3+2x-1)^7 (3x^2+2) \cdot dx$

$= \frac{1}{8}(x^3+2x-1)^8 + c$

③ $\int (x-1)^{-7} \cdot dx = \frac{-1}{6}(x-1)^{-6} + c$

④ $\int (x^3-3)^5 x^2 \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{3}\int (x^3-3)^5 \, 3x^2 \cdot dx$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(x^3-3)^6 + c = \frac{1}{18}(x^3-3)^6 + c$

⑤ $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int 2x (x^2+1)^{\frac{3}{4}} \cdot dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}(x^2+1)^{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{14}(x^2+1)^{\frac{7}{4}} + c$

(6) $\int (3x^2+8x+5)^6 (3x+4)\cdot dx$

$\frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \cdot 2(3x+4)\cdot dx$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{7}(3x^2+8x+5)^7 + c$

(7) $\int (x^2+3)^2 \cdot x \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int (x^2+3)^2 \cdot 2x \cdot dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(x^2+3)^3 + c \Rightarrow \frac{1}{6}(x^2+3)^3 + c$

(8) $\int (x^2+3)^2 \cdot dx$

ملاحظة: اذا كانت متغير داخل القوس ضربا نقطة متغير (x) نفتح القوس ونكامل على القواعد السابقة.

$\int (x^4+6x^2+9)\cdot dx$

$= \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x + c$

⑨ $\int (x^2+2)\, 3x \, dx$

~~$\frac{3}{2}\int (x^2+2)$~~

$3\int (x^2+2)\, 2x \, dx$

$3 \cdot \frac{1}{2}\int (x^2+2)\, 2x \, dx$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9}(x^2+2)^9 + c$

$= \frac{3}{18}(x^2+2)^9 + c = \frac{1}{6}(x^2+2)^9 + c$

تمارين

① $\int -3\, dx$ ② $\int 1 \cdot dx$

③ $\int \sqrt[7]{x^5} \, dx$ ④ $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

⑤ $\int x^{-2} \, dx$ ⑥ $\int -5x^2 \, dx$

⑦ $\int (3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}) \, dx$ ⑧ $\int (x^2 + 2\sqrt[3]{x} - 7x^{-\frac{3}{2}} + 8) \, dx$

⑨ $\int (x^2+x+5)^5 (2x+1) \, dx$

⑩ $\int (x^3+1)^{\frac{3}{2}} x^2 \, dx$ ⑪ $\int (x^2+1)^2 \, dx$

⑫ $\int (x^2+1)^3 \, 5x \, dx$